Počítačové zobrazování fraktálních množin

M. Olbrich, A. Šťastná, J. Krásenský, V. Chloubová, J. Bednář

Gymnázium Opatov, Gymnázium Omská, Gymnázium Jihlava
SPŠSaD Děčín, SPŠSaD Děčín

michalolbrich@seznam.cz, aneta.stastna@email.cz,
krasensky@seznam.cz, NikaEsterez@gmail.com,
programagor@gmail.com

Abstrakt

Fraktální geometrie je zajímavá tím, jaké objekty se v ní vyskytují. Jejich pochopení je druhořadé, protože lidské oko je hned odzbrojeno jejich neskonalou krásou. Poté se zaměří na to, jak je možné něco takového vytvořit. Právě nekonečný počet iterací dokáže vytvořit toto dílo. Každý fraktál je jedinečný, protože na jeho vykreslení se použije jiný vzorec, jiná čísla, jiná metoda. V přírodě najdeme fraktály na každém rohu – třeba kapradí, slunečnice, stromy nebo říční systémy.

1. Základní pojmy

Soběpodobnost je pro tyto útvary typická: zvětšená část celku vypadá podobně jako objekt samotný.

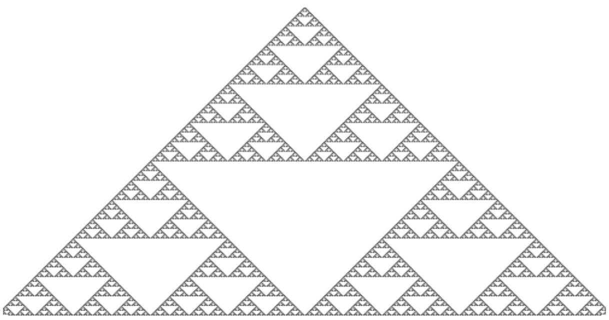
Topologická dimenze určuje, kolik rozměrů jsme použili pro zobrazení daného útvaru.

Hausdorffova dimenze určuje, jakou rychlostí členitost daného objektu směřuje do nekonečna. Udává tudíž, jak moc je daný objekt členitý.

Gaussova rovina se používá pro zobrazování komplexních čísel. Na osu *x* vynášíme reálnou složku, na osu *y* imaginární.

2. Vysvětlení na příkladech

Fraktály většinou vypadají nahodile a chaoticky. Mezi nejjednodušší patří např. Cantorovo diskontinuum. Přímku si rozdělíme na tři části a prostřední vyjmeme. S každou nově vzniklou úsečkou provedeme stejný proces, čímž nám zase vzniknou nové úsečky, s kterými uděláme opět totéž. Dalším příkladem je Sierpinskeho trojúhelník. Narýsujeme



Sierpinského trojúhelník

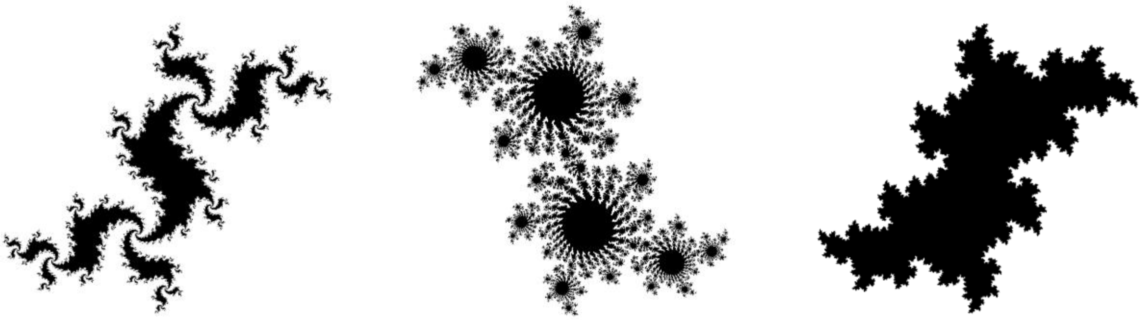
trojúhelník, který si rozdělíme na čtyři díly. Poté prostřední díl vyjmeme a toto děláme s každým nově vzniklým trojúhelníkem. Ideální fraktál je iterovaný až do nekonečna.

3. Komplexní fraktály

Jde o útvary zobrazované v Gaussově rovině.

Juliova množina

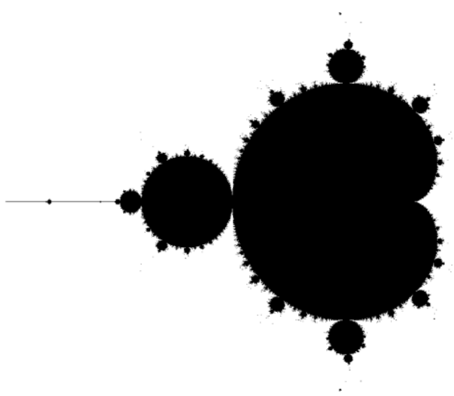
Zvolme libovolný bod na Gaussově rovině a označme jej c. Následně každý bod z Gaussovy roviny dosaďme do posloupnosti dané předpisem $Z_{n+1}=Z_n^2+c$. Jestliže bod Z po nekonečnu iterací této posloupnosti dojde k nekonečnu, pak do množiny nepatří; v opačném případě tam patří. Konstanta c je pro celou množinu stejná a může být libovolná, proto je Juliových množin nekonečně mnoho.



Juliovy množiny

Mandelbrotova množina

Vytváří se pomocí iterace komplexní posloupnosti $Z_{n+1}=Z_n^2+c$, přičemž konstanta c je pro každý počáteční bod rovna právě tomuto bodu.

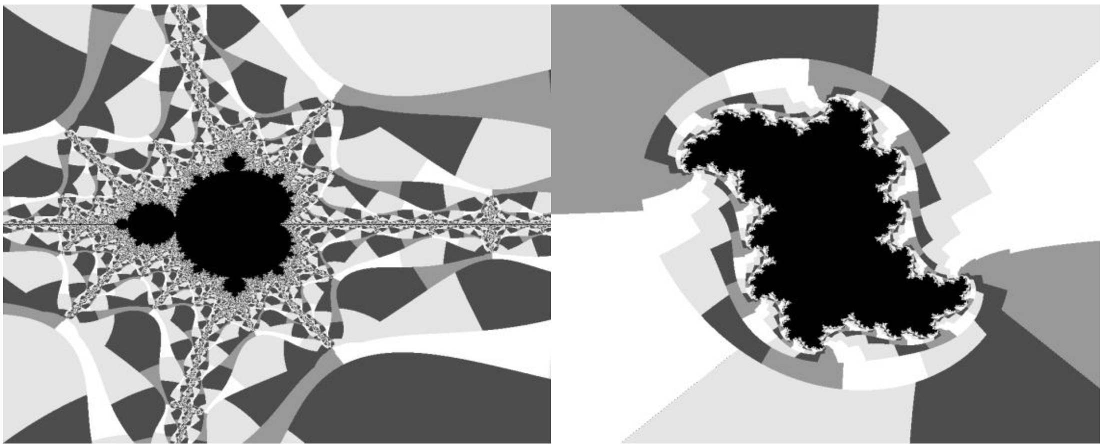


Mandelbrotova množina

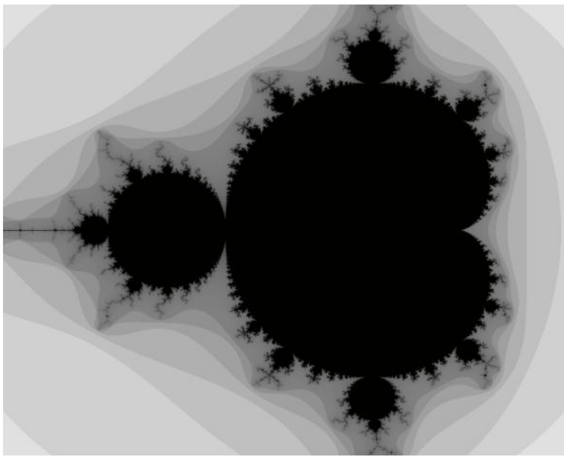
4. Metody zobrazení

Klasické zobrazení – Body, které do množiny patří, mají jednu barvu a ostatní barvu jinou. (Všechny dosud uvedené obrázky vznikly právě tímto způsobem.)

Obarvovací algoritmy – Každému bodu je přiřazena barva podle jeho vlastností, například podle úhlu posledního bodu v komplexní rovině (tzv. únikový úhel) nebo podle počtu iterací, po kterém se pozná, že posloupnost směřuje k nekonečnu. Některé obarvovací algoritmy produkují diskrétní hodnoty, jiné naopak spojité spektrum. Při použití algoritmu s diskrétními hodnotami jsou na výsledném obrázku vidět barevné skoky.

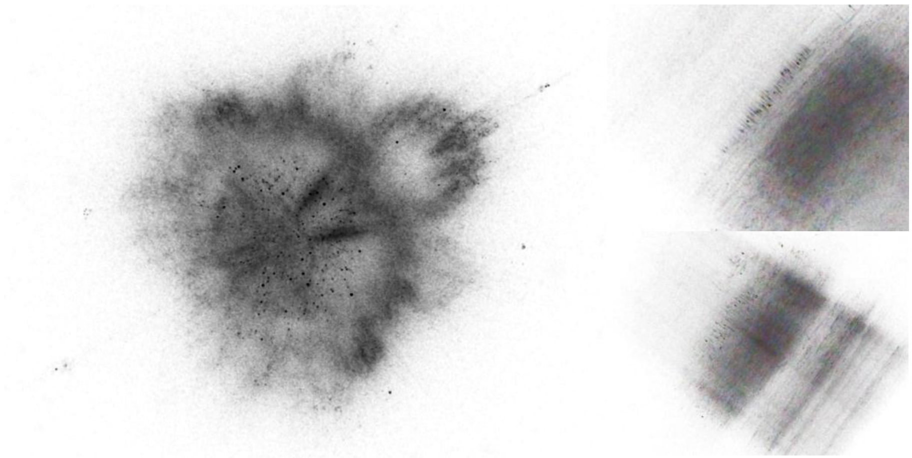


Množiny obarvené podle kvadrantu, do kterého dopadl poslední bod posloupnosti



Množina obarvená podle počtu potřebných iteraci

3D zobrazení – Hlavní myšlenka spočívá v použití hyperkomplexních čísel s dvěma imaginárními složkami. Tím získáme tři osy, které lze využít pro trojrozměrné zobrazení. Můžeme tak zobrazovat klasickou Mandelbrotovu množinu, ve které ale *Z* není komplexní, nýbrž hyperkomplexní číslo. Nebo lze použít metodu zobrazení Buddhabrot, kde se bod s každou iterací jednoduše naplotuje do prostoru.



Hyperkomplexní Buddhabrot

5. Poděkování

Chtěli bychom poděkovat našemu supervizorovi Petru Paušovi, který nás důkladně seznámil s problematikou fraktální geometrie. Dále bychom rádi poděkovali Linusu Tovarsovi za poskytnutí Kernelu, Richardu Matthew Stallmanovi a jeho vývojovému týmu za poskytnutí utilit GNU a v neposlední řadě také všem vývojářům gcc, bez kterýchžto by náš svět byl ochuzen o tolik krás (jako například o obrázek do hloubky prokresleného Buddhabrota).

6. Reference

[1] P. Pauš, http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~pauspetr/html/skola/fraktaly/reserse.htm [cit 20.6.2011]
[2] ,H.-O. Peitgen, P.H. Richter, The Beauty of Fractals, 1999

Veškeré obrázky jsou naším dílem.