

Numerické řešení variačních úloh v Excelu

Miroslav Hanzelka, Lenka Stará, Dominik Tělupil
Gymnázium Česká Lípa, Gymnázium Jírovcova 8, Gymnázium Brno
MirdaHanzelka@seznam.cz, lenka.stara1@seznam.cz,
dtelupil@gmail.com

Abstrakt:

V práci jsme se věnovali řešení optimalizačních úloh a porovnání numerických metod s analytickými. Nalezli jsme tvar čínské střechy, křivku zavěšeného řetězu a nejlepší aerodynamický tvar rakety. Každý příklad obsahuje krátké fyzikální vysvětlení, numerické řešení a graf. Postup s využitím Řešitele programu Microsoft Excel se ukázalo jako výhodnější než analytické řešení.

1 Úvod

Variační počet jako matematická disciplína vznikl v 18. století, kdy L. Euler definoval jeho základy. Od té doby se tento obor značně rozvinul, ale analytické řešení variačních úloh je stále velmi náročné. Přitom lze mnoho fyzikálně-matematických problémů interpretovat a řešit jako variační úlohy. Proto jsme se rozhodli využít možností aplikace Řešitel obsaženého v programu Microsoft Excel, který umožňuje snadno řešit tyto úlohy optimalizací na základě numerických výpočtů. Tímto postupem ukázkově vyřešíme tři klasické úlohy z oblasti variačního počtu a srovnáme ho s Eulerovým analytickým řešením.

2 Metody řešení variačních úloh

Analytické řešení

Analytické řešení variačních úloh spočívá v hledání takové funkce $y(x)$, která minimalizuje (resp. maximalizuje) hodnotu primitivní funkce

$$F[y(x)] = \int_a^b (x, y(x), y'(x)),$$

jež se nazývá *funkcionál*. K tomu slouží *Euler-Lagrangeova rovnice*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

kteřá musí být pro $y(x)$ splněna, aby byla hodnota funkcionálu minimální [1]. Toto obecné řešení lze použít i na řešení velmi složitých problémů. Jako příklad však použijeme jednoduchý vzorec pro výpočet délky křivky

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Předpokládáme, že nejkratší spojnicí dvou bodů je úsečka. Dosazením do Euler-Lagrangeovy rovnice a následnými úpravami získáme vzorec

$$0 = \frac{y''(x)}{1 + (y'(x))^{3/2}}.$$

Již nyní je zjevné, že náš předpoklad byl správný, neboť řešením rovnice je lineární funkce. Avšak uvedený výpočet vyžaduje znalosti diferenciálního počtu a při jiném zadání by mohl být časově náročný. V některých případech analytické řešení nemusí existovat a je proto nutné řešit úlohu numericky.

Numerické řešení

Numerická metoda spočívá ve využití nástroje Řešitel programu Microsoft Excel, který funguje na principu hledání lokálních extrémů. Je nutné zadat parametry a podmínky, které má úloha splňovat a počáteční odhad řešení. Právě počáteční odhad je značným úskalím této metody, neboť při nevhodně zvolených hodnotách program nalezne pouze lokální extrém, který nemusí být extrémem globálním. Takový výsledek pak většinou neodpovídá dané skutečnosti.

Uvedme konkrétní optimalizační úlohu: *Je dán obvod trojúhelníku. Určete délky stran tak, aby obsah byl maximální.* Vstupním parametrem je délka obvodu. Zároveň využijeme vztah mezi délkami stran a obvodem a obsahem trojúhelníku (pomocí Heronova vzorce). Podmínky jsou splnění trojúhelníkové nerovnosti a nezápornosti délek stran. V této jednoduché úloze nezáleží příliš na počátečním odhadu. Řešením je dle očekávání rovnostranný trojúhelník.

4 Čínská střecha

Úloha o nejrychlejším sestupu (angl. Quickest descent problem) neboli čínská střecha se zabývá hledáním takového tvaru střechy, po kterém by bez tření nejrychleji stékala voda. Tuto úlohu vyřešil na základě fyzikální analogie J. Bernoulli, avšak nepoužil k tomu analytických metod. Oba postupy vedou k jednomu řešení, kterým je cykloida [1]

$$x = \frac{1}{2} k^2 (\theta - \sin \theta), \quad y = \frac{1}{2} k^2 (1 - \cos \theta).$$

V Excelu jsme tuto úlohu řešili jako hledání minimální hodnoty času sestupu na základě změny proměnných x_k, y_k , které představují souřadnice stékající vody na jednotlivých úsecích o počtu n . Výsledným grafem je dle předpokladu cykloida (obr. 1). S rostoucím n se hodnota výsledku zpřesňuje, ovšem od určité hodnoty, zhruba $n=20$, se změna pohybuje v řádech statisícin procent. Výsledek lze zatížit podmínkou, která bude vyžadovat konstantní hodnotu Δx . Rovnoměrné rozložení tak zamezí programu navolit si nejvhodnější vzdálenosti, což však vede v tomto případě k zbytečným nepřesnostem.



Obr. 1

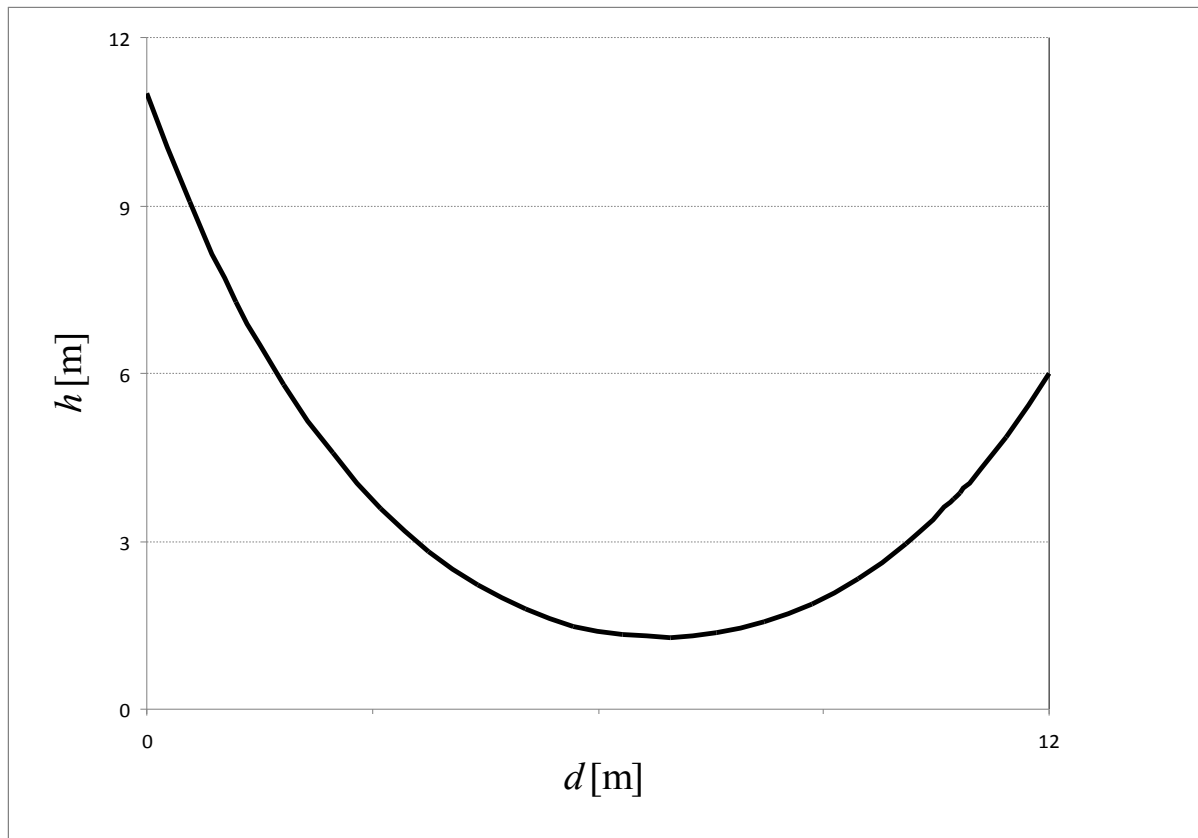
5 Řetězovka

Další klasickou úlohou je určení prověšení řetězu. Celkovou křivku si rozdělíme na několik kratších úseků o souřadnicích a_1 až a_n a b_1 až b_n a vypočteme jejich potenciální energii. Tvar křivky bude určen součtem energií všech úseků, přičemž se snažíme docílit, aby potenciální energie byla minimální. Grafem řetězu bude křivka, jejíž minimum je posunuto směrem k níže zavěšenému konci (obr. 2). Analytické řešení této úlohy by vyžadovalo vyřešení rovnic

$$a \cosh\left(\frac{0+c}{a}\right) + b = H_1, a \cosh\left(\frac{d+c}{a}\right) + b = H_2,$$

$$\int_0^d \sqrt{1+(y')^2} dx = L,$$

kde H_1, H_2 jsou výšky bodů závěsu, d je vzdálenost těchto bodů, L je délka řetězu a proměnné a, b, c jsou parametry křivky. Řešení těchto rovnic je časově velmi náročné a v konečné fázi bychom se nevyhnuli použití numerických metod.



Obr. 2

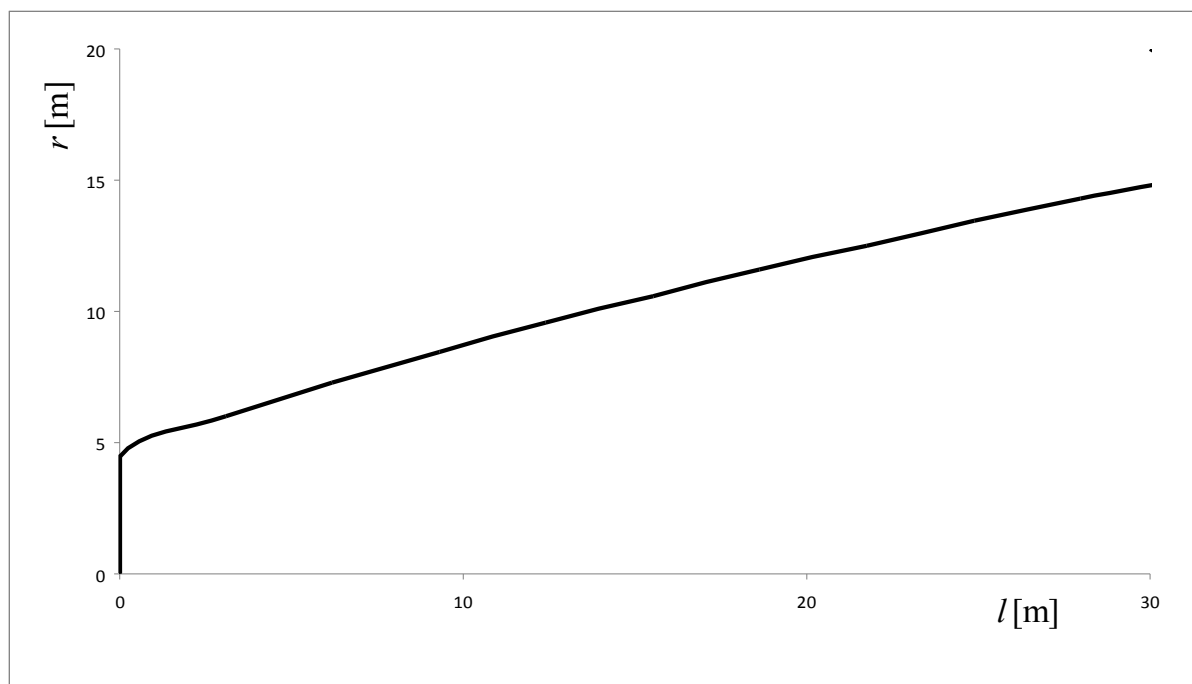
6 Raketa

Představme si, že vesmírná raketa prolétá řídkým plynem, jaký se nachází např. v horní vrstvě atmosféry. Takový plyn nevykazuje vlastnosti tekutiny, považujeme ho za shluk nezávislých částic. Úkolem je zjistit ideální tvar čela rakety, aby průlet plynem způsoboval co nejmenší ztráty rychlosti.

Jedná se o další z klasických optimalizačních úloh. Autorem je Isaac Newton. Před řešením této úlohy v Excelu je potřeba uvědomit si, že změna hybnosti molekul při nárazu (a tedy i změna hybnosti rakety) závisí na úhlu dopadu. Naším úkolem je tedy upravit goniometrické tvary těchto působících sil a vyjádřit je v proměnných závislých na délce a průměru rakety. Pro výsledný vzorec

$$\frac{F}{C} = 2 \sum \frac{(r_k + r_{k-1})(r_k r_{k-1})^3}{(x_k - x_{k-1})(r_k - r_{k-1})^2},$$

kde $C = \pi \rho v^2$, najdeme v řešiteli hodnoty x_k, r_k , které ho minimalizují. Na výsledné křivce (obr. 3) je zřejmé, že raketa má ploché čelo, což odpovídá skutečnosti a shoduje se s výsledkem autora úlohy.



Obr. 3

7 Shrnutí

Pomocí optimalizace v Řešiteli programu Excel jsme našli řešení tří klasických úloh variačního počtu. Čínská střecha má tvar cykloidy, určili jsme tvar řetězovky a potvrdili, že ideální raketa pro let v řídké atmosféře musí mít ploché čelo. Numerické řešení se ukázalo jako rychlejší než analytické a zároveň dostatečně přesné. Tento způsob řešení variačních úloh lze použít na řadu dalších matematicko-fyzikálních problémů.

Poděkování

Na prvním místě bychom chtěli poděkovat doc. Ing. Jaromíru Kukulovi, Ph.D. za konzultace a výpomoc při realizaci projektu. Děkujeme taktéž FJFI ČVUT v Praze a organizátorům Týdne vědy, kteří nám umožnili na tomto projektu pracovat.

Reference:

- [1] FISCHER, J.: *Introduction to the Calculus of Variations* College of the Redwoods, 1999, pp. 4–11